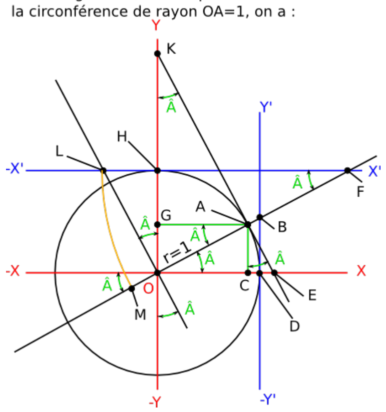
http://www.saintpoint.org/

Rappel de Mathématique, la Tangente : Cercle trigonométrique sur un plan.

Pour l'angle AOD,mesuré par l'arc DA dans
la circonférence de rayon OA=1, on a :



Ci-contre le **<u>cercle trigonométrique</u>** sur un plan :

Les termes en gras-souligné sont des règles trigonométriques.
<u>le cercle trigonométrique ne fonctionne que dans un repère orthonormé</u>. C'est à dire :
1) **<u>Les droites -XX et -YY sont sur</u>** un plan (**<u>espace euclidien</u>**).
2) **<u>Les droites -XX et -YY</u>** qui se croisent en O **<u>sont</u>** perpendiculaires (**<u>orthogonales</u>**).
3) Les longueurs **<u>OD et OH</u>**, sont **<u>égales au rayon</u>** et de **<u>longueur 1</u>**.
4) **<u>Le cercle trigonométrique</u>**, passe donc par les points D, A, H, il **<u>a son centre en O</u>**, intersection des droites -XX et -YY.

tangente d'un triangle rectangle incrit dans le cercle trigonométrique (ici AOC)

L'angle pris pour référence étant l'angle, noté Â, ayant son sommet en O, entre l'axe -XX et le droite OA (OA=hypothénuse de longueur 1)

La **<u>tangente d'un angle</u>** est le **<u>rapport</u>** du **<u>coté opposé</u>** à l'angle **<u>diviser par le coté adjacent</u>** de l'angle. Pour l'angle Â **<u>on écrit tg(Â)</u>**
Pour le triangle AOC inscrit dans le cercle on a : tg(Â)=CA÷OC et dans le triangle OAG : tg(Â)=GO÷AG

Mais (si on y regarde bien,) on retrouve aussi tg(Â) :
dans le triangle BOD : tg(Â)=DB÷OD ; dans le triangle EOA : tg(Â)=AE÷OA ; dans le triangle EAC : tg(Â)=CE÷AC ;
dans le triangle OFH : tg(Â)=HO÷FH ; dans le triangle LOH : tg(Â)=HL÷OH ; dans le triangle LFO : tg(Â)=OL÷FO ;
dans le triangle EKO : tg(Â)=OE÷KO ; dans le triangle OKA : tg(Â)=AO÷KA ; dans le triangle AKG : tg(Â)=GA÷KG ;
=> ces rapports de longueur expriment tous la tangente de l'angle Â. ;

<u>tg(Â)</u>, est un **<u>coefficient de proportionnalité entre deux segments</u>** formant un angle Â, il n'a pas d'unité, (ce qui veut aussi dire que le coté opposé à Â et le coté adjacent de Â ont la même unité de mesure).
=> grace à Thalès, on peut dire **<u>si r = OD = OH = 1</u>**, que la tangente de Â représente la longueur **<u>DB = tg(Â)</u>**.

La tangente est une pente (hauteur÷distance) **=sin(Â)÷cos(Â)** =CA÷OC; c'est la pente de la droite OA. **C'est le paramètre "a" dans f(x)=ax** de cette droite.
Pour sin(Â)=0 soit Â=0 ou Â=π ou Â=π+(N×π) (N étant un entier); tg(Â)=0÷1 =0 donc la tangente est horizontale, (C'est la droite -XX)
Pour cos(Â)=0 soit Â=π/2 ou Â=(π/2)+(N×π) (N étant un entier); tg(Â)=1÷0 =∞(infini) donc la tangente est verticale, (C'est la droite -YY)

<u>Connaitre la tangente de angle Â et la longueur du coté adjacent</u> =cos(Â) d'un angle Â, **<u>permet de calculer</u>** maintenant, pour tous les angles Â trouvés sur le dessin, **<u>la longueur du coté opposé.</u>** Ou l'inverse connaissant le coté opposé et la tangente de l'angle Â on calculera le coté adjacent.
Démonstration par l'exemple : La tangente est, par définition, le coefficient qui divise par le cosinus et mutiplie par le sinus de l'angle.
En divisant le coté adjacent par le cosinus de l'angle on trouve l'hypoténuse OC÷cos(Â) = rayon(OA) (voir § cosinus).
En multipliant le rayon par le sinus de l'angle on trouve le coté opposé AC =rayon(OA)×sin(Â) (voir § sinus).
La tangente est le rapport sin(Â)÷cos(Â), **<u>multiplier le coté adjacent par la tangente</u>** réalise les deux opérations précédantes en une fois, **<u>donne le coté opposé</u>** => OC×tg(Â) =[OC÷cos(Â)]×sin(Â) =OA×sin(Â) =CA

En pratique

Pour faire une analogie concrète à la tangente :
Un rectangle OCAG a une diagonale OA(=GC)=1 (pris comme unité). Le coté adjacent OC=GA mesure 0.866, soit environ ((√3)/2)×diagonale OA.
Le coté opposé CA = OG mesure 0.5 , soit 1/2 OA.
La **tangente de Â** est par définition CA÷OC soit (1/2)÷((√3)/2)=**1/√3** (=environ 0,577350269)
Pour info cet angle correspond à un arc de π/6 rd (radian) soit (180÷π)×(π÷6)=30°.

APPLICATION RÉELLE exemple avec un toit :
La longueur couverte sur une horizontale est de n×OC, la hauteur d'un pan de toiture est de (n×AC puisque OA=1), la pente du toit est de (n×AC)÷(n×OC) =AC÷OC.
Inconvénient, si on prend notre exemple n est un multiple de (√3)/2 ce qui n'est pas une unité de mesure bien pratique! C'est là qu'intervient Thalès et son théorème.
Comme les droites CA et DB sont paralèlles, on peut affirmer que AC÷OC est ègale à DB÷OD Avec OD=1 cette fois! tg(Â) devient DB÷OD pour une longueur horizontale de 1.

Notre longueur couverte sur une horizontale est de n'×OD, la hauteur d'un pan de toiture est de (n'×DB avec OD=1), la pente du toit est de (n'×DB)÷(n'×OD) =AC÷OC.

La hauteur de ce toit est directement connue en connaissant la longueur couverte par ce toit DB = n'(OD÷cos(Â)×sin(Â)) = n'(OD×tg(â)).
Comme AB÷OD est égale à DB÷OD la tangente indique la longueur DB pour une longueur OD =1 (la pente sur un mètre par exemple)

Application numérique :
=> Si la longueur du plancher couvert par le toit est de 10 mètres (10×OD), le rampant du toit est de 10×(OD÷cos(Â)) =10×OB, la hauteur du toit est de 10×(OB×sin(Â)) =10×(DB) =10×[DB×(sin(Â)÷cos(Â)] = 10×[(1/2)÷(√3)/2)] =10×[1÷√3] (=environ 5,77350269 mètres). Remarque : 1/√3 =√3/3 comme on le voit aussi dans les tables mémo-techniques.
ou plus simplement : => 10×[sin(Â)÷cos(Â)] 10×tg(Â).